62. 正則函数ノ単葉性及ビ多葉性ニツイテ II

鍋谷堅次郎（東北大）

12号 36 ノ拙論ニ対シテ能代君カラ綿密ナ御注意ヲ頂キマシタカラ御許ヲ乞フテ此所ニ掲ゲルコトニシマス。其際ニ私述ベタ定理7ノ最後ノ一言ハ誤リデシタ。限界ノ場合ヲ示ス函数ノ研究中ニ見落シガアリマシタ為ニトンダ間違ヒヲ致シマシタ。最後ノ一言ハ抹殺シタイト思ヒマス。16号 46 ノ尾崎君ノ定理5ガ正当デス。

次ニ能代君 御注意ヲ述ベ私自身モ一二ノ補ヒヲシタ思ヒマス.

先ヅ定理1， $\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f(z)-z|d\varphi \leqq M$ トイフ仮定カラ $|a_n| \leqq$ 出マス．何者，

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz,\quad |a_n|\leqq\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^n}\int|f-z|d\varphi\leqq\frac{M}{r^n},$$

$r\to 1$ ノトキ $|a_n|\leqq M$

同様ニ定理2デハ $G(z)=f-z=a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n+\cdots$ $=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ トスレバ $a_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}v(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$,

$$|a_n|\leqq\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}|v(r,\theta)|d\theta\leqq\frac{2M}{r^n},\quad r\to 1,\quad |a_n|\leqq 2M$$

随ッテ $1\geqq\sum_2^\infty n|a_n|r^{n-1}$ ナラバ $|z|<r$ デ星型トイフ定理カラ

定理1ハ $|z|<\boxed{1-\sqrt{\frac{M}{M+1}}}$ デ星型，定理2ハ $|z|<1-\sqrt{\frac{2M}{2M+1}}$ デ星型トナリマス。

之ハMニ制限ガナイコトガ少シヨクナッテヰマス。（以上ノコトハ檜垣宣明君カラモ御注意ヲ受ケタコトヲ一寸付ケ加ヘマス）

次ニ市原氏ノ複葉性ニ関スル定理

$f(z)=a_0+a_1z+\quad+a_pz^p+\cdots$ ガ $|a_p|\geqq\sum_1^\infty|a_{p+n}|\binom{p+n}{n}r$ ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<r$ デ正則且高々 p 葉デアル。

ヲ用ヒマスト

定理 3。 $\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f-(z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_pz^p)|d\varphi\leqq M$ ノ假定ガ

$|a_{p+n}|\leqq M\qquad(n=1,2,\cdots)$ ガ出マスシ

定理 4. $\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|\Re\{f-(z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_pz^p)\}|d\varphi\leqq 2M$ ヨリ

$|a_{p+n}|\leqq 2M\qquad(n=1,2,\cdots)$ ガ出マスカラ

結局 $|z|<1-\sqrt[p+1]{\dfrac{M}{M+|a_p|}}$ デ高々 p 葉 (定理 3)

$|z|<1-\sqrt[p+1]{\dfrac{2M}{2M+|a_p|}}$ デ ‥‥‥ (定理 4)

ガ出マス。之モ M ニハ無制限デス。

次ニ

定理 8. $f(z)\neq 0$ ノ假定ハ不要デス。何故ナラバ $\frac{1}{2\pi}\int|f'|d\varphi\leqq M$ ヨリ $f'=1+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots$, $|b_n|\leqq M$ ガ出ルカラデス。従ッテ

定理 9。 $f(z)/z$ ノ假定ハ不要デス。

次ニ貴兄ノ与ヘラレタ問題

$f(z)=z+\cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則且ココデ $|f(z)-z|<M$ ナルトキノ単葉半径ヲ出スコト。之ハ本実ニ面倒ナ問題ノ様デス。私ノ今迄ニ得タ結果ガ多少共参考ニナリマスレバ幸デス。

$\frac{f(z)}{z}=\varphi(z)$ トシテオケバ明ニ $|\varphi(z)-1|<M$ for $|z|<1$ トナリマス。ヨク知ラレタ有界函数ノ性質デ $|\varphi'(z)|\leqq\frac{1}{1-|z|^2}\frac{M^2-|\varphi-1|^2}{M}$

故ニ $\boxed{\left|\frac{z\varphi'}{\varphi}\right| \leqq \frac{|z|}{1-|z|^2}\,\frac{M^2-|\varphi-1|^2}{M|\varphi|}}$ (1)

$$\left|\frac{z\varphi'}{\varphi}\right| \leqq \frac{|z|}{1-|z|^2}\,\frac{M^2-(\varphi-1)(\bar\varphi-1)}{M|\varphi|} = \frac{|z|}{1-|z|^2}\,\frac{M^2-\{|\varphi|^2-(\varphi+\bar\varphi)+1\}}{M|\varphi|}$$

$$= \frac{|z|}{1-|z|^2}\,\frac{M^2-(|\varphi|^2-2R(\varphi)+1)}{M|\varphi|} = \frac{|z|}{1-|z|^2}\,\frac{(M^2-1)-|\varphi|^2+2R(\varphi)}{M|\varphi|}$$

$$\leqq \frac{|z|}{1-|z|^2}\,\frac{(M^2-1)-|\varphi|^2+2|\varphi|}{M|\varphi|} \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

$M \geqq 1$ ト假定スルト

$$1-M|z| \leqq |\varphi| \leqq 1+M|z| \quad \text{for } |z|<\frac{1}{M}$$

(2) ハ $|\varphi|$ ノ減少函数デスカラ $|\varphi| = 1-M|z|$ ト (2) ニ代入スレバ

$$\left|\frac{z\varphi'}{\varphi}\right| \leqq \frac{|z|}{1-|z|^2}\,\frac{M^2-M^2|z|^2}{M(1-M|z|)} \quad \text{for } |z|<\frac{1}{M}$$

$$= \frac{M|z|}{1-M|z|} \quad 故ニ \quad \frac{Mt}{1-Mt}=1 \text{ ヨリ } t=\frac{1}{2M}$$

定理 0. $f(z)=z+\cdots$ ヲ $|z|<1$ デ正則且 $|f-z|<M$ $(M\geqq 1)$ トスレバ $|z|<\frac{1}{2M}$ デ單葉ー星型且ツ $f_0(z)=z+Mz^2$ ガ到達スル。何故ナラバ

$f_0'(z)=1+2Mz$ ハ $z=-\frac{1}{2M}$ デ vanish スル。

$M<1$ ナルトキデモ (2) ヲ吟味スルコトニ依テ $M \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ナラバ定理 0 ハ成立スルコトガワカリマス。然シ $M<\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキハ上ノ方法デハ困難ナ様デス。貴兄ノ御研究ヲ願ヒマス。

能代君ノ御注意ニヨリ定理 8 ノ假定 $f(z)\neq 0$ ハ不要トナリマシタ。從ッテ私ノ定理 8 ノ証明ハ徒労ガ多ク含マレテ居ルトユフコトニナリマスガ其代償トシテ次ノ一結果ヲ述ベテヲキマス

$$f(z) = z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

ヲ $|z|<1$ デ正則デ $f(z)/z^2 \neq 0$ 又 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z)|\,d\varphi \leqq M$, $z=re^{i\varphi}$, $r<1$ ナルトキハ $Mr^6-3Mr^4+(4M-1)r^2-1=0$ ノ唯一ノ正根ヲ r_0 トスルト $f(z)$ ハ $|z|<r_0$ ニ於テ二葉デアル。

証明。 $\sqrt{f(z)} = z+c_2z^2+\cdots$ ハ $|z|<1$ デ一價正則トナリマスカラ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z)|\,d\varphi = r^2+|c_2|^2r^4+\cdots\cdots \leqq M$$

$$\sum_2^\infty n|c_n|r^{n-1} \leqq \sqrt{\sum_2^\infty |c_n|^2}\sqrt{\sum_2^\infty n^2 r^{2(n-1)}} \leqq \sqrt{M-1}\sqrt{\frac{2}{(1-r^2)^3}-\frac{1}{(1-r^2)^2}-1}$$

<1 for $r<r_0$

$$\frac{2}{(1-r_0^2)^3}-\frac{1}{(1-r_0^2)^2}-1=\frac{1}{M-1}$$

或ハ $Mr_0^6-3Mr_0^4+(4M-1)r_0^2-1=0$

$\sqrt{f(z)}$ ガ $|z|<r_0$ デ單葉デアルカラ $f(z)$ ハ $|z|<r_0$ デ二葉トナリマス。次ニ定理10ト11ハ互ニ獨立シテヰル様ニ取扱ヒマシタガ此二者ハ實ハ Alexander (J. W. Alexander, II) ノ關係ニヨリ結バレテヰルコトヲ一寸述ベテオキマス。尚定理10, 11ニ並行シテ $\overset{+}{\log}\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ 及ビ $\overset{+}{\log}|f(z)|$ ノ代リニ $\mathrm{amp}\,\frac{f(z)}{z}$, $\mathrm{amp}\, f(z)$ ヲ用ヒテモ同様ノ結果ガ得ラレマスガ此處ニハ略シマス

(11, 26 受取)